Extraits de l’article de Gottlob Frege,
Les Fondements de l’arithmétique

(Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, 1884)
trad. C. Imbert, Seuil, Paris, 1969

mot *Zahl* » sépare Z de a, a de h, etc... Le concept « syllabe du mot *Zahl* » prend le mot comme un tout, indivisible en ce sens que ses parties ne tombent plus sous le concept « syllabe du mot *Zahl* ». Mais tous les concepts ne sont pas de cette nature; nous pouvons diviser de plusieurs manières ce qui tombe sous le concept de rouge, sans que les parties ainsi obtenues cessent d'être subsumées par le concept. A un tel concept, on ne peut attribuer aucun nombre fini. On peut donc énoncer comme suit les propriétés de délimitation et d'indivisibilité de l'unité.

Seul un concept qui délimite précisément les éléments qu'il subsume et n'admet aucune autre division de ces éléments peut constituer une unité pour un nombre cardinal fini.

On voit que l'indivisibilité a ici un sens particulier.

Comment concilier l'identité et la distinction des unités, la réponse est maintenant facile. Le mot « unité » est employé ici en un double sens. D'une part, les unités sont identiques au sens que nous avons expliqué ci-dessus. Dans la proposition « Jupiter a quatre lunes », l'unité est : « lune de Jupiter ». Sous ce concept tombent le satellite I, le II, le III et le IV. On peut donc dire : l'unité à laquelle on rapporte I est identique à celle
[67] à laquelle on rapporte II, etc... Là est l'identité. Quand d'autre part on parle de la distinction des unités, on entend alors par là celle des choses comptées.

4. Le concept de nombre cardinal

Chaque nombre est un objet indépendant [1]

55. Attribuer un nombre, c'est dire quelque chose d'un concept; ceci admis on peut essayer de compléter les définitions que Leibniz donne des nombres particuliers, en énonçant celles de 0 et de 1.

On est tenté de définir 0 ainsi : le nombre 0 appartient à un concept si ce dernier ne subsume aucun objet... Mais il semble

1. *Ein selbständiger Gegenstand* (*N. d. T.*).

qu'on ait substitué à 0 « aucun », qui a la même signification. C'est pourquoi on préférera l'énoncé suivant : le nombre 0 appartient à un concept si, quel que soit a, il est toujours vrai que a ne tombe pas sous ce concept.

On pourrait dire de manière analogue : le nombre 1 appartient au concept F si, quel que soit a, il n'est pas toujours vrai que a ne tombe pas sous ce concept, et si des propositions :

« a tombe sous F » et « b tombe sous F »,

il suit que a et b sont le même objet.

Il reste encore à définir le passage d'un nombre à son successeur. Nous pourrions le formuler ainsi : le nombre $(n + 1)$ convient au concept F s'il existe un objet a qui tombe sous F et tel que le nombre n appartienne au concept « qui tombe sous F mais n'est pas a ».

56. Ces définitions se présentent si naturellement à nous après les résultats auxquels nous sommes parvenus que nous devons exposer la raison pour laquelle elles ne peuvent pas nous satisfaire.

La dernière définition surtout peut donner prise au doute.
[68] A précisément parler, le sens de l'expression « le nombre n appartient au concept G » est aussi inconnu que celui de l'expression : « le nombre $(n + 1)$ appartient au concept F ». Certes, on peut au moyen de cette définition et de la précédente, dire ce que signifie :

« Le nombre $1 + 1$ appartient au concept F »

puis, en utilisant ce premier résultat, donner le sens de l'expression

« Le nombre $1 + 1 + 1$ appartient au concept F »

etc...; mais nos définitions ne nous permettent pas, pour prendre un exemple brutal, de dire si le nombre *Jules César* appartient à un concept, ou si le célèbre conquérant de la Gaule est ou non un nombre. Nous ne pouvons pas non plus, avec nos essais de définition, prouver que $a = b$ si le nombre a appartient au concept F et si le nombre b lui appartient également. On ne saurait donc pas justifier l'expression : « *le* nombre qui appartient au concept F »; et il serait absolument impossible de prouver l'égalité de deux nombres, puisque nous ne pourrions pas concevoir un nombre déterminé. Notre définition de 0 et de 1 nous a fait illusion; en vérité, nous avons seulement dit quel doit être le sens de tournures comme celles-ci :

« le nombre 0 appartient à... »,
« le nombre 1 appartient à... »;

mais rien ne nous autorise à y distinguer le 0, le 1, comme des objets indépendants, reconnaissables.

57. Il faut ici examiner de plus près ce que nous avons dit : que l'attribution d'un nombre enveloppe une assertion sur un concept. Dans la proposition : « le nombre 0 appartient au concept F », 0 n'est qu'une partie du prédicat, — si nous prenons le concept F comme sujet réel. C'est pourquoi j'ai évité d'appeler *propriété* d'un concept, un nombre tel que 0, 1 ou 2. Chaque nombre particulier se manifeste comme un objet indépendant en ceci justement qu'il constitue seulement une partie de l'assertion portée sur le concept. J'ai déjà remarqué plus haut qu'on dit : « le 1 », et qu'on fait de 1 un objet par l'emploi de l'article défini. Cette indépendance [1] est manifeste
[69] dans toute l'arithmétique, par exemple dans l'équation $1 + 1 = 2$. Puisque notre but est de saisir le concept de nombre tel que la science l'emploie, nous ne devons pas nous laisser troubler par le fait que, dans le langage quotidien, le nombre prend également l'aspect d'un attribut. On peut toujours y remédier. Par exemple, on transformera la proposition : « Jupiter a quatre lunes » en : « le nombre des lunes de Jupiter est quatre ». Il ne faut pas prendre ici « est » pour une simple copule, comme dans la proposition : « le ciel est bleu ». La preuve en est qu'on peut dire : « le nombre des lunes de Jupiter, c'est quatre », ou : « c'est le nombre quatre ». « Est » a ici le sens de « est identique à », « est le même que ». Nous avons donc une identité où l'on affirme que l'expression : « les lunes de Jupiter » désigne le même objet que le mot « quatre ». Et l'identité se trouve être la forme d'assertion la plus usitée en arithmétique. Si on ne trouve pas trace de Jupiter ni de lune dans le mot quatre, ce n'est pas une objection qui nous atteigne. Le nom « Colomb » ne recèle rien non plus de l'Amérique ni de l'acte de découvrir;

1. *Selbstandigkeit* (*N. d. T.*).

n'empêche que le même individu est appelé Colomb et l'homme qui a découvert l'Amérique.

58. On pourrait objecter que nous ne sommes pas capables de nous représenter [1] l'objet que nous nommons quatre, ou le nombre des lunes de Jupiter, comme quelque chose d'indépendant. Ce n'est pas une raison pour dénoncer l'indépendance que nous avons attribuée au nombre. Certes, on croit volontiers que la représentation de quatre points sur la face d'un dé comporte quelque chose qui correspond au mot « quatre »; mais c'est une illusion. Pensez à un pré vert, et essayez de voir si votre représentation est altérée quand vous remplacez l'article indéfini par le terme numérique « un » : rien n'y est ajouté; tandis que le mot « vert » a bien un correspondant dans la
[70] représentation. Si on se représente le mot « Gold » imprimé, on ne pensera d'abord à aucun nombre. Si on se demande combien de lettres il a, on obtiendra le nombre 4; mais la représentation ne sera pas pour autant plus précise, elle demeurera absolument inchangée. Nous avons introduit le concept « lettre du mot Gold », et c'est en lui que gît le nombre. La chose n'est pas si claire dans le cas des quatre points d'un dé, car la ressemblance des points entre eux suggère si immédiatement le concept qu'on remarque à peine son intervention. On ne peut se donner aucune représentation du nombre, ni comme un objet indépendant, ni comme une propriété des choses externes, parce que le nombre n'est ni un être sensible ni une propriété des choses externes. Ce qui est particulièrement clair dans le cas du nombre 0. On cherchera en vain à se représenter 0 étoiles visibles. On peut bien penser que le ciel est couvert de nuages : il n'y a rien là qui corresponde au mot « étoile » ni à 0. On ne fait qu'imaginer une situation qui pourrait donner lieu au jugement : aucune étoile n'est visible pour l'instant.

59. Il est possible que chaque mot éveille en nous une représentation quelconque, même un mot comme « seulement »;

1. « Se représenter » est pris au sens où il s'agirait d'une représentation imagée.

mais il n'est pas besoin qu'elle corresponde au contenu du mot; et elle peut être différente en différentes personnes : on se représentera par exemple une situation qui suggère une proposition où figure le mot, ou bien le mot parlé rappelle le mot écrit.

Et ceci n'est pas réservé aux particules. Nous n'avons, bien certainement, aucune représentation de la distance qui nous sépare du soleil. Car, bien que nous connaissions la formule indiquant combien de fois il faut multiplier l'unité de mesure, nous ne savons pas engendrer, au moyen de cette formule, une image qui s'approche ne serait-ce qu'un peu de ce que l'on voudrait.
[71] drait. Mais ce n'est pas une raison pour douter de la justesse du compte qui donne la distance, et cela ne nous empêche pas de raisonner plus avant en tablant sur cette distance.

60. Nous ne pouvons même pas nous représenter une chose aussi concrète que la terre telle que nous la savons être; nous nous contentons d'une sphère d'une grandeur médiocre et qui joue pour nous le rôle d'un signe. Mais nous savons que la terre diffère beaucoup de cette sphère. Notre représentation demeure souvent bien en deça de ce que nous voudrions représenter; nous pouvons cependant, et avec une grande certitude, porter des jugements sur un objet comme la terre, même là où il s'agit de sa grandeur.

La pensée nous fait souvent transgresser les bornes du représentable sans que nos jugements perdent pour autant toute matière. Même si, comme il semble, l'homme n'est pas capable de penser sans représentations, leur rapport à l'objet de la pensée peut être extrinsèque, arbitraire et conventionnel.

Que le contenu d'un mot ne soit pas représentable, il n'y a là aucune raison pour lui refuser une signification ou en exclure l'usage. L'illusion contraire vient de ce que nous considérons les mots isolément et cherchons la signification de chacun d'eux, et à procéder ainsi on prend une représentation pour la signification cherchée. Nous croyons qu'un mot n'a pas de contenu si aucune image interne n'y correspond. Mais il faut toujours faire porter l'attention sur une proposition complète. C'est là seulement que les mots veulent proprement dire quelque chose. Les images internes qui nous visitent alors n'ont pas besoin

de correspondre aux éléments logiques du jugement. Il suffit qu'une proposition prise comme un tout ait un sens : ses parties reçoivent par là même un contenu.

Cette remarque permet de jeter quelque lumière sur maints
[72] concepts difficiles tels que celui de l'infiniment petit [1], et sa portée ne se limite pas aux mathématiques.

En demandant qu'on reconnaisse l'indépendance du nombre, je ne veux pas dire qu'un terme numérique désigne quelque chose en dehors du contexte d'une proposition; je veux seulement exclure son emploi comme prédicat ou attribut, emploi qui modifie sa signification.

61. On peut objecter que, même si la terre n'est pas véritablement objet de représentation, c'est cependant une chose externe, elle a un lieu déterminé. Mais où réside le nombre 4? Ni au dehors ni au dedans de nous. La remarque est juste, si on entend la question au sens spatial. Une détermination spatiale du nombre 4 n'a aucun sens; mais il s'ensuit seulement que 4 n'est pas un objet spatial : nullement que ce n'est pas un objet du tout. Il n'est pas vrai que tout objet soit quelque part. Nos représentations [2] elles-mêmes ne sont pas en nous en ce sens (sous-cutanées pour ainsi dire). On trouverait en nous des cellules ganglionnaires, des globules sanguins, etc., mais point de représentations. On ne peut pas appliquer à celles-ci des prédicats spatiaux : une représentation n'est ni à droite ni à gauche d'une autre. Les représentations n'ont entre elles aucune distance assignable en millimètres. Si nous les disons en nous, c'est pour dire qu'elles sont subjectives.

En admettant que le subjectif n'ait pas de lieu, comment se peut-il que le nombre 4, objectif lui, ne soit nulle part? Je prétends qu'il n'y a là aucune contradiction. Ce nombre est effectivement le même pour tous ceux qui le considèrent, mais ceci n'a rien à voir avec la spatialité. Il n'est pas vrai que toute réalité objective ait un lieu.

1. Il s'agit de définir le sens d'une équation telle que :

$$df(x) = g(x)\, dx$$

et non pas de montrer un segment limité par deux points et dont la longueur serait dx...

2. En prenant ce mot dans un sens purement psychologique et non pas psychophysique.

[73] *Qu'il faut déterminer le sens d'une égalité numérique si l'on veut obtenir le concept de nombre cardinal*

62. Si nous n'avons aucune représentation ni intuition d'un nombre, comment peut-il jamais nous être donné? Les mots n'ont de signification qu'au sein d'une proposition; il s'agira donc de définir le sens d'une proposition où figure un terme numérique. Cette prescription laisse encore s'exercer notre libre choix. Mais nous avons précédemment établi que, sous les termes numériques, il convient d'entendre des objets indépendants. Ainsi, nous disposons d'un genre de propositions qui doivent avoir un sens, celui des propositions traduisant le fait qu'on reconnaît un objet. Si le signe *a* désigne un objet, nous devons avoir un critère qui permette de décider si *b* est le même que *a*, même si nous n'avons pas toujours le pouvoir d'utiliser ce critère. Dans le cas présent nous devons définir le sens de la proposition :
« le nombre qui appartient au concept F est le même que celui qui appartient au concept G »;
c'est-à-dire que nous devons énoncer le contenu de cette proposition d'une autre manière, sans employer l'expression :
« le nombre qui appartient au concept F ».

Par là même, nous donnerons un critère général pour juger de l'identité des nombres. Et quand nous aurons le moyen de saisir un nombre déterminé et de reconnaître son identité, nous pourrons lui donner un terme numérique pour nom propre.

63. Hume a déjà formulé [1] un procédé de ce genre : « Si deux nombres sont dans une conjonction telle qu'une unité de l'un correspond à chaque unité de l'autre, nous admettons qu'ils sont égaux. » Plus récemment les mathématiciens [2] semblent
[74] s'être mis d'accord sur l'idée qu'il faut définir l'identité de deux

1. Baumann, *op. cit.*, tome II, p. 565.
2. Cf. E. Schröder, *op. cit.*, p. 7 et 8; E. Kossak, *die Elemente der Arithmetik, Programm der Friedrichs-Wederschen Gymnasiums* Berlin, 1872, p. 16. G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883.

nombres par une correspondance univoque [1]. Mais on se heurte d'emblée à des objections logiques et à des difficultés qu'on ne peut pas laisser de côté sans examen.

Les nombres ne sont pas les seuls objets susceptibles d'être mis en rapport d'identité. Il semble donc qu'on ne devrait pas avoir à définir l'identité pour le cas particulier des nombres. Si le concept d'identité a été défini auparavant, on devrait penser qu'à partir de ce concept et du concept de nombre cardinal, on pourrait savoir si des nombres cardinaux sont identiques, sans qu'il soit besoin d'une définition particulière.

Contre quoi il faut remarquer que nous n'avons pas encore établi le concept de nombre cardinal, et que ce concept doit recevoir sa détermination de notre définition de l'identité de deux nombres. Notre intention est de construire un contenu de jugement qui se laisse interpréter comme une identité, et une identité telle que les termes de part et d'autre soient des nombres. Nous ne voulons donc pas définir l'identité qui convient en propre à notre cas, mais utiliser le concept déjà connu d'identité pour en tirer ce qu'il convient de tenir pour identique. J'avoue que ce semble être un mode de définition bien inhabituel et que les logiciens ont négligé. Quelques exemples montreront du moins qu'il n'est pas totalement inconnu.

64. Le jugement : « La droite *a* est parallèle à la droite *b* » qu'on écrit symboliquement :

$$a \,//\, b$$

peut être compris comme une identité. Un telle interprétation fait apparaître le concept de direction, et on peut dire : « la direc-
[75] tion de la droite *a* est identique à la direction de la droite *b* ».
On remplace le signe // par le signe =, plus général, et on répartit sur *a* et *b* le contenu particulier du signe primitif. On obtient ainsi un nouveau concept en analysant le contenu de jugement d'une manière différente. Souvent, d'ailleurs, on conçoit la chose à l'inverse, et beaucoup d'auteurs préfèrent la définition suivante :

1. Nous traduisons ainsi : *eindeutig Zuordnung*, réservant « correspondance biunivoque » pour traduire : *beiderseits eindeutig Zuordnung*. N. d. T.

les droites parallèles sont celles qui ont même direction. On démontre alors très facilement la proposition : « si deux droites sont parallèles à une troisième, elles sont parallèles entre elles » en faisant appel à un théorème d'identité dont l'énoncé est l'analogue exact de celui qu'on vient de lire. L'ennui est qu'on inverse l'ordre réel des choses. Car en géométrie tout doit au départ être intuitif. Et je demande si quelqu'un a jamais eu l'intuition de la direction d'une droite. D'une droite oui, mais distingue-t-on dans l'intuition une droite de sa direction? C'est peu probable; ce concept provient d'une élaboration intellectuelle greffée sur l'intuition. Mais on a bien une représentation de droites parallèles. La démonstration à laquelle j'ai fait allusion repose sur une subreption; on suppose ce qu'on veut démontrer en employant le mot « direction ». En effet, à supposer que la proposition : « si deux droites sont parallèles à une troisième, elles sont parallèles entre elles » soit fausse, on ne pourrait pas convertir $a // b$ en une identité.

De la même manière, on peut tirer du parallélisme des plans un concept qui corresponde à celui de la direction des droites. J'ai lu qu'on employait pour cela le nom d'orientation. La similitude géométrique met en relief le concept de forme; par exemple, on dit aussi bien : « ces deux triangles sont semblables » que : « ces deux triangles ont même forme » ou : « la forme de l'un est la même que la forme de l'autre ». On pourrait aussi tirer un concept de la collinéarité des figures géométriques, pour lequel nous ne disposons d'aucun nom encore.

[76] **65.** Pour passer, par exemple, du parallélisme [1] au concept de direction, nous proposons la définition suivante :
la proposition

« la droite *a* est parallèle à la droite *b* »

veut dire la même chose que :
« la direction de la droite *a* est identique à la direction de la droite *b* ».

1. Pour m'exprimer plus aisément et être plus facilement compris, je parlerai de parallélisme. L'essentiel de ce que je dirai pourra être facilement transposé au cas de l'identité des nombres.

Cette définition s'écarte du procédé habituel en ce qu'elle semble avoir pour objet de déterminer la relation d'identité, déjà connue, alors qu'elle doit en réalité introduire l'expression « la direction de la droite *a* », qui n'est pas mise en relief. Ce qui donne lieu à une deuxième objection : en posant ce que nous avons posé, ne risquons-nous pas de nous trouver en contradiction avec les lois bien connues de l'identité? Quelles sont ces lois? En tant que vérités analytiques, elles doivent pouvoir être tirées du concept lui-même. Leibniz [1] donne la définition suivante :

« *Eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate.* »
Je m'approprie cette définition que je tiens pour celle de l'identité. Qu'on dise : « le même », avec Leibniz, ou qu'on dise : « identique », c'est sans importance. Il semble que « le même » exprime une coïncidence totale, « identique », une coïncidence limitée à tel ou tel point de vue. Mais on peut employer une tournure où cette différence disparaît; par exemple si, à la place de : « les segments sont identiques de longueur » on dit : « la longueur des segments est identique » ou « la même », et si à la place de : « les surfaces sont identiques de couleur » on dit : « la couleur des surfaces est identique ». C'est ainsi que nous avons employé le mot dans les exemples précédents. Toutes les lois de l'identité
[77] sont en fait contenues dans la substituabilité, entendue sans aucune restriction.

Pour justifier la définition proposée de la direction d'une droite, il faudrait donc montrer qu'on peut partout substituer :
« la direction de *a* »
à

« la direction de *b* »

si la droite *a* est parallèle à la droite *b*. Notre tâche est simplifiée par le fait qu'on ne sait rien énoncer de la direction d'une droite sinon qu'elle coïncide avec la direction d'une autre droite. Il nous suffirait d'indiquer que la substitution est possible dans une identité de ce genre ou dans des contenus contextuels dont une identité de ce genre serait partie [2]. Tous les autres énoncés

1. *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis*, Erdmann, p. 94.
2. Un jugement hypothétique, par exemple, où une identité de direction pourrait être énoncée dans l'antécédent ou dans le conséquent.

portant sur des directions devraient être préalablement définis, et, pour ces définitions, nous poserions la règle qu'on doit toujours pouvoir substituer à la direction d'une droite celle d'une de ses parallèles.

66. La définition proposée soulève cependant une troisième objection. Dans la proposition :

« la direction de *a* est identique à la direction de *b* »,

la direction de *a* est présentée comme un objet [1], et notre définition nous donne un moyen de reconnaître cet objet s'il devait se présenter sous un autre vêtement, par exemple comme direction de *b*. Mais ce moyen ne vaut pas pour tous les cas. Il ne permet pas, par exemple, de décider si l'Angleterre est la même chose
[78] que la direction de l'axe de la terre. Qu'on veuille bien excuser cet exemple apparemment dépourvu de sens : bien sûr, personne ne va confondre l'Angleterre avec la direction de l'axe terrestre; mais ce n'est pas grâce à notre définition. Elle ne nous dit pas s'il faut affirmer ou nier la proposition :

« la direction de *a* est identique à *q* »

lorsque *q* n'est pas donné sous la forme : « la direction de *b* ». Nous aurions besoin ici du concept de direction. Si nous en disposions, nous pourrions poser que, si *q* n'est pas une direction, il faut nier la proposition; et que si *q* est une direction, alors la définition donnée précédemment est le critère déterminant pour la vérité de cette proposition. On aimerait définir ce concept ainsi :

« *q* est une direction, s'il existe une droite *b* dont la direction est *q* ».

Mais il est évident qu'on tourne en rond. Pour appliquer cette

1. C'est ce qu'indique l'article défini. Un concept est pour moi prédicat possible d'un contenu de jugement singulier; un objet est sujet possible d'un tel contenu de jugement. Soit la proposition :

« La direction de l'axe du télescope est identique à la direction de l'axe de la terre. »

Si nous disons que la direction de l'axe du télescope est sujet, le prédicat est : « identique à la direction de l'axe de la terre. » C'est un concept. Mais la direction de l'axe de la terre n'est qu'une partie du prédicat; c'est un objet. On peut tourner la proposition de manière à ce qu'il en soit sujet.

définition, nous devrions déjà savoir, pour chaque cas, s'il faut nier ou affirmer la proposition :

« *q* est identique à la direction de *b* ».

67. Si on voulait poser : *q* est une direction si elle a été introduite au moyen de la définition ci-dessus, la manière dont l'objet *q* est introduit deviendrait une propriété de cet objet; ce qui n'est pas. La définition d'un objet, en tant que telle, ne dit rien de cet objet mais pose le sens d'un symbole. Cela fait, elle devient un jugement qui traite de l'objet, mais on ne peut plus dire qu'elle introduit l'objet; elle est sur le même plan que tous les autres énoncés concernant cet objet. Si on voulait attribuer à la définition le privilège d'introduire l'objet, on supposerait par là même qu'il ne peut être donné que d'une seule manière. Sinon, le fait qu'il *n'a pas été* introduit par notre définition n'impliquerait pas qu'il ne *saurait l'être*. Et toutes les identités reviendraient
[79] à admettre l'identité de cela seul qui nous est donné de la même manière. Résultat si évident et si stérile qu'il ne vaut pas la peine d'être énoncé. On ne pourrait tirer aucune conclusion qui ne se confonde avec l'une ou l'autre des hypothèses. Or les applications multiples et importantes de l'identité tiennent bien plutôt à ce qu'elle permet de reconnaître comme identique ce qui nous est donné de manière différente.

68. On voit que nous ne parviendrons jamais ainsi à définir rigoureusement le concept de direction, ni celui de nombre, et pour les mêmes raisons : il nous faut donc chercher un autre chemin. Si la droite *a* est parallèle à la droite *b*, l'extension du concept « droite parallèle à la droite *a* » est identique à l'extension du concept « droite parallèle à la droite *b* ». Et à l'inverse, si les extensions des concepts ci-dessus sont identiques, *a* est parallèle à *b*. Nous proposons de poser par définition :

La direction de la droite *a* est l'extension du concept « parallèle à la droite *a* ».

La forme du triangle *d* est l'extension du concept « semblable au triangle *d* ».

Si nous voulons appliquer ce procédé de définition à notre cas, nous devons mettre des concepts à la place des droites et des triangles, et remplacer le parallélisme ou la similitude par la possibilité d'associer biunivoquement les objets qui tombent sous l'un des concepts à ceux qui tombent sous l'autre. En bref, je dirai que le concept F est *équinumérique* au concept G si nous sommes en possession d'une telle correspondance. Je demande en outre qu'on prenne cette expression comme un signe choisi arbitrairement; sa signification ne doit pas être tirée des mots qui le composent, mais de cela seul que nous posons.

Je définis donc :

Le nombre qui appartient au concept F est l'extension [1] du
[80] concept : « équinumérique au concept F ».

69. Peut-être voit-on mal la justesse de cette définition. Ne peut-on pas comprendre autre chose sous les termes : extension d'un concept? Ce qu'il faut entendre par là ressort clairement des énoncés premiers que l'on peut formuler concernant les extensions de concept. Ce sont :

I. leur identité.

II. qu'une extension est plus vaste que l'autre.

Or, la proposition :

l'extension du concept « équinumérique au concept F » est identique à l'extension du concept « équinumérique au concept G »

est vraie, si et seulement si la proposition :

« le même nombre appartient au concept F et au concept G »

l'est aussi. Ce qui est en plein accord avec nos stipulations.

Sans doute ne dit-on pas qu'un nombre est plus vaste [*umfas-*

1 Je pense qu'on pourrait dire tout simplement « concept » à la place de « extension du concept ». Mais on s'exposerait à une double objection :

I) Ce serait en contradiction avec ce que j'ai précédemment affirmé, à savoir que chaque nombre est un objet. C'est ce que montre la présence de l'article défini dans des expressions telles que « le deux » et l'impossibilité où nous sommes de dire : des uns, des deux, etc... au pluriel, ou encore le fait que le nombre ne constitue qu'une partie du prédicat utilisé dans une proposition qui attribue un nombre.

II) Des concepts peuvent avoir même extension sans coïncider.

Je pense qu'on peut lever ces deux objections, mais ceci nous entraînerait trop loin. Je supposerai que l'on sait ce qu'est une extension de concept.

sender] qu'un autre nombre, au sens où on le dit de l'extension d'un concept. Mais il ne pourra jamais se faire que

[81] l'extension du concept « équinumérique au concept F »

soit plus vaste que

l'extension du concept « équinumérique au concept G ».

Le rapport que l'on rencontrera est le suivant : si tous les concepts qui sont équinumériques à G le sont aussi à F, alors, inversement, tous les concepts qui sont équinumériques à F le sont aussi à G. Bien entendu il ne faut pas confondre « plus vaste » [d'extension] avec « plus grand », qui se dit des nombres.

Il est aussi possible de concevoir le cas où l'extension du concept « équinumérique au concept F » serait plus ou moins vaste qu'une autre extension de concept, mais celle-ci d'après notre définition ne pourrait pas être un nombre cardinal, et l'usage répugne à dire qu'un nombre est plus vaste ou moins vaste que l'extension d'un concept; rien cependant ne nous empêche d'admettre cette tournure, si un tel cas devait jamais se présenter.

Achèvement et confirmation de notre définition

70. Une définition trouve confirmation dans sa fécondité. Toutes les définitions qu'on pourrait omettre sans rompre les démonstrations doivent être rejetées; elles sont sans valeur aucune.

Aussi tenterons-nous d'utiliser notre définition du nombre cardinal appartenant au concept F, pour déduire quelques propriétés bien connues des nombres. Nous nous limiterons aux propriétés les plus simples.

A cette fin, il nous faut une idée plus nette de ce que j'appelle équinuméricité. Elle a été définie par la correspondance biunivoque; je vais expliquer cette expression, car on pourrait bien y voir un procédé relevant de l'intuition.

Examinons l'exemple suivant. Si un maître d'hôtel veut s'assurer qu'il y a sur la table autant de couteaux que d'assiettes, il n'a pas besoin de compter les uns et les autres dès lors qu'il met un couteau à droite de chaque assiette, en sorte que chaque cou-
[82] teau soit sur la table, à droite d'une assiette. Les assiettes et les couteaux sont dans une correspondance biunivoque parce qu'ils

sont tous liés entre eux par le même rapport de position. Si maintenant dans la proposition :

« α est à droite de A »,

on substitue des objets différents à α et A, la partie du contenu propositionnel qui demeure inchangée, constitue l'essence de la relation. Généralisons ce résultat.

Si d'un contenu de jugement portant sur un objet *a* et sur un objet *b* nous séparons *a* et *b* du contexte, il nous reste un concept de relation, lequel réclame un double complément. Si dans la proposition :

« la Terre a une masse supérieure à la Lune »

nous ôtons « la Terre », nous obtenons le concept « qui a une masse supérieure à celle de la Lune ». Si nous ôtons l'objet « la Lune », nous obtenons le concept « qui a une masse inférieure à la Terre ». Otons les deux à la fois, il nous reste un concept de relation. Celui-ci, pris isolément, est dépourvu de sens autant qu'un simple concept : il demande un complément pour devenir un contenu de jugement. Or ce complément peut être apporté de plusieurs manières : à la place de Terre et Lune, on peut mettre, par exemple, Soleil et Terre; en opérant la substitution, on effectue en même temps la séparation du concept et de ce qui le complète.

Chaque paire d'objets mis en correspondance se rapporte au concept de relation — on pourrait dire en tant qu'elle est sujet — comme un objet particulier se rapporte au concept sous lequel il tombe. Nous avons ici un sujet composé. Parfois même, lorsque la relation est symétrique, l'analogie des termes relatés avec un sujet composé apparaît dans le langage, par exemple dans la proposition : « Pélée et Thétis étaient les parents d'Achille [1]. »
[83] Sans doute n'est-il guère possible de rendre le contenu de la proposition : « la Terre est plus grande que la Lune » de telle sorte que « la Terre et la Lune » jouent le rôle d'un sujet composé, car le « et » indique toujours une certaine identité de fonction. Mais cette limitation du langage est sans importance.

Le concept de relation appartient donc à la logique pure, tout comme le concept simple. Nous ne parlons pas du contenu parti-

1. Ne pas confondre ce cas avec celui où le « et » semble unir deux sujets alors qu'il unit en réalité deux propositions.

culier d'une relation, mais de sa seule forme logique. Si on en peut dire quelque chose, ce sera une vérité analytique, connue *a priori*. Ceci vaut des relations comme des autres concepts. De même que :

« *a* tombe sous le concept F »

est la forme générale d'un contenu de jugement qui porte sur un objet *a*; de même :

« *a* est dans la relation Φ à *b* »

sera le forme générale d'un contenu de jugement qui porte sur les objets *a* et *b*.

71. Si tout objet tombant sous le concept F est dans la relation Φ à un objet tombant sous le concept G, et si pour tout objet tombant sous G il y a un objet tombant sous F qui est dans la relation Φ avec le premier, les objets tombant sous F et ceux tombant sous G sont mis en correspondance par la relation Φ.

On peut encore demander ce que signifie l'expression :

« tout objet qui tombe sous F est dans la relation Φ avec un objet tombant sous G »

au cas où aucun objet ne tombe sous F. Voici comment je l'interprète :

Les deux propositions :

« *a* tombe sous F »

[84] et

« *a* n'a la relation Φ avec aucun objet tombant sous G »

ne peuvent pas être vraies simultanément, quel que soit *a*; en sorte que l'une ou l'autre des deux est fausse. D'où il suit que : « tout objet qui tombe sous F est dans la relation Φ avec un objet qui tombe sous G » est vraie s'il n'y a aucun objet qui tombe sous F, car la première proposition :

« *a* tombe sous F »

doit toujours être niée, quel que soit *a*.

De la même manière, la proposition :

« pour tout objet qui tombe sous G, il existe un objet qui tombe sous le concept F et qui a la relation Φ avec ce premier objet »

veut dire que les deux propositions :

« *a* tombe sous G »

et

« aucun objet qui tombe sous F n'a la relation Φ avec *a* »
ne peuvent être vraies simultanément, quel que soit *a*.

72. Nous venons d'envisager le cas où les objets tombant sous les concepts F et G sont mis en correspondance par la relation Φ. Nous voulons maintenant que la correspondance soit biunivoque, je veux dire, que les deux propositions suivantes soient vraies simultanément :

1 — si *d* a la relation Φ avec *a* et si *d* a la relation Φ avec *e*, quels que soient *d*, *a* et *e*, *a* et *e* sont identiques.

2 — si *d* a la relation Φ avec *a* et si *b* a la relation Φ avec *a*, quels que soient *d*, *b*, et *a*, *d* et *b* sont identiques.

Nous avons ainsi ramené la correspondance biunivoque à
[85] de purs rapports logiques, et nous pouvons donner la définition suivante :

l'expression :

« le concept F est équinumérique au concept G »

a même signification que l'expression :

« il existe une relation Φ qui associe biunivoquement les objets qui tombent sous le concept F et les objets qui tombent sous le concept G ».

Je rappelle que :

le nombre cardinal qui appartient au concept F est l'extension du concept « équinumérique au concept F », et j'ajoute :

l'expression

« *n* est un nombre cardinal »

veut dire la même chose que :

« il y a un concept tel que *n* est le nombre cardinal qui lui appartient ».

Ainsi le nombre cardinal est-il défini, circulairement semble-t-il mais sans faute cependant, car « le nombre cardinal qui appartient au concept F » a été défini auparavant.

73. Nous allons montrer maintenant que le nombre cardinal qui appartient au concept F est identique à celui qui appartient au concept G si le concept F est équinumérique au concept G. Ce qui sonne comme une tautologie. Ce n'est pourtant pas une

tautologie si on pense que la signification du mot « équinumérique » ne ressort pas de sa composition, mais de la définition précédemment donnée.

Pour être fidèle à notre définition [du nombre cardinal], il faut montrer que l'extension du concept « équinumérique au concept F » est la même que l'extension du concept « équinumérique au concept G » si le concept F est équinumérique au concept G. En d'autres termes, il faut montrer que, dans cette hypothèse, les propositions suivantes sont toujours vraies :

si le concept H est équinumérique au concept F,
[86] il est aussi équinumérique au concept G;

et

si le concept H est équinumérique au concept G,
il est aussi équinumérique au concept F.

La première proposition revient à dire : il existe une relation qui associe biunivoquement les objets qui tombent sous le concept H aux objets qui tombent sous le concept G s'il y a une relation Φ qui associe biunivoquement les objets tombant sous le concept F à ceux tombant sous le concept G et s'il existe une relation Ψ qui associe biunivoquement les objets tombant sous le concept H aux objets tombant sous le concept F. On peut l'illustrer par la série des lettres :

H Ψ F Φ G

Or, on peut assigner une relation de ce genre; c'est le contenu de l'expression :

« il existe un objet tel que *c* a avec lui la relation Ψ et tel qu'il a avec *b* la relation Φ »,

si on prend soin d'ôter de cette expression *c* et *b* (pris comme termes de la relation). On peut montrer que cette relation est biunivoque et qu'elle associe les objets qui tombent sous le concept H à ceux qui tombent sous le concept G.

On peut démontrer de même l'autre proposition [1]. Ces indications suffiront, je l'espère, à faire voir que la démonstration

1. Et de la même manière la proposition converse. Si le nombre qui appartient au concept F est le même que le nombre appartenant au concept G, alors le concept F est équinumérique au concept G.

n'a besoin d'aucun élément emprunté à l'intuition et que nos définitions ne sont pas sans efficace.

74. Nous pouvons maintenant passer aux définitions des nombres particuliers.

[87] Puisque rien ne tombe sous le concept : « non identique à soi-même », je pose par définition :

0 est le nombre cardinal qui appartient au concept « non identique à soi-même ».

On trouvera peut-être étrange que je parle ici d'un concept. On objectera que ce concept implique contradiction et que cela rappelle de vieilles connaissances, telles que le fer en bois et le cercle carré. Après tout, je pense qu'elles ne méritent pas le mal qu'on en dit. On ne prétendra pas que ces concepts soient utiles, mais ils ne peuvent pas nuire non plus si on prend soin de ne pas supposer qu'ils subsument quelque chose; et cela n'est pas supposé dans le simple usage du concept. La contradiction éventuellement enveloppée dans un concept n'est pas toujours si évidente qu'elle apparaisse sans recherche; encore faut-il d'abord prendre ce concept en considération et le traiter selon les lois logiques, comme n'importe quel autre. Or la logique et la rigueur des preuves exigent seulement qu'un concept ait des limites parfaitement définies, que pour tout objet on puisse dire s'il tombe sous ce concept ou non. Les concepts qui recèlent une contradiction comme « non identique à soi-même » satisfont entièrement à cette exigence; quel que soit l'objet choisi, on sait qu'il ne tombe pas, sous un tel concept [1]. J'emploie le mot « concept » de telle sorte que

« *a* tombe sous le concept F »

1. Tout autre est la définition d'un objet à partir d'un concept sous lequel il tombe. Par exemple : l'expression « la plus grande fraction » n'a aucun contenu, parce que l'article défini prétend indiquer un objet déterminé. A l'inverse, le concept « fraction inférieure à 1 et telle qu'aucune fraction inférieure à 1 ne lui soit supérieure » échappe à toute objection; et si on veut montrer qu'une telle fraction n'existe pas, on a précisément besoin de ce concept, bien qu'il contienne une contradiction. Mais si on voulait employer ce concept pour déterminer un objet qu'il subsumerait éventuellement, il faudrait d'abord prouver deux choses :

soit la forme générale d'un contenu de jugement portant sur un
[88] objet *a* et demeure un contenu de jugement quoi que ce soit que l'on substitue pour *a*. Et en ce sens,

« *a* tombe sous le concept non identique à soi-même »

veut dire la même chose que

« *a* n'est pas identique à soi-même »

ou

« *a* n'est pas identique à *a* »

Pour définir le 0, j'aurais pu prendre n'importe quel concept sous lequel rien ne tombe. Mais il convenait de choisir un concept tel que cette particularité puisse en être démontrée par des moyens purements logiques; ce à quoi le concept « non identique à soi-même » semble plus favorable, étant entendu que je donne à « identique » la définition leibnizienne introduite plus haut, définition purement logique.

75. On doit maintenant pouvoir montrer, en utilisant ce que nous avons posé précédemment, que tout concept sous lequel rien ne tombe est équinumérique à tout autre concept sous lequel rien ne tombe, et seulement à un tel concept. D'où il suit que 0 est le nombre cardinal qui appartient à un tel concept, et qu'aucun objet n'est subsumé par un concept si le nombre qui lui appartient est 0.

Supposons qu'aucun objet ne tombe ni sous le concept F ni sous le concept G; pour démontrer leur équinuméricité, nous avons besoin d'une relation Φ qui vérifie les propositions :

> Chaque objet qui tombe sous F est dans la relation Φ à un objet qui tombe sous G ; et pour tout objet qui tombe sous G, il existe un objet tombant sous F qui a avec le premier la relation Φ.

[89] Si on rappelle ce qui a été dit de la signification de ces expressions, toute relation remplit ces conditions, compte tenu de nos stipulations [§71]. L'identité y satisfait donc aussi, qui de surcroît

1) qu'un objet tombe sous ce concept,

2) qu'un seul objet tombe sous lui.

Puisque la première de ces propositions est fausse, l'expression « la plus grande fraction » est dépourvue de sens.

est biunivoque. Elle remplit en effet les deux réquisits que nous avons précédemment établis [§72].

Dans l'hypothèse où, au contraire, un objet, *a* par exemple tombe sous G tandis que F n'en subsume aucun, les deux propositions :

« *a* tombe sous G »

et

« il n'y a pas d'objet tombant sous F ayant avec *a* la relation Φ »

sont vraies simultanément pour toute relation Φ ; en effet la première est vraie d'après notre première stipulation, et la seconde d'après la seconde stipulation. Si aucun objet ne tombe sous F il n'y en a aucun non plus qui soit dans une relation quelconque avec *a*. Il n'y a donc aucune relation qui fasse correspondre, conformément à notre définition, les objets qui tombent sous F et les objets qui tombent sous G; en conséquence les concepts F et G ne sont pas équinumériques.

76. Je me propose maintenant de définir la relation qui affecte deux membres voisins de la suite naturelle des nombres. Posons que la proposition :

> « il existe un concept F et un objet *x* qui tombe sous ce concept tels que le nombre cardinal qui appartient à ce concept est *n* et que le nombre cardinal qui appartient au concept 'qui tombe sous F mais n'est pas identique à *x*' est *m* ».

veut dire la même chose que

> « *n* suit immédiatement *m* dans la suite naturelle des nombres. »

J'évite l'expression « *n* est *le* nombre cardinal le plus rapproché de *m* dans la suite » car l'emploi de l'article défini requiert à son tour la démonstration préalable de deux propositions [1]. Pour
[90] la même raison, je ne peux pas encore dire : « $n = m + 1$ », car la présence du signe $=$ fait de $(m + 1)$ un objet.

77. Pour en venir au nombre 1, nous devons d'abord montrer que quelque chose suit immédiatement 0 dans la suite naturelle des nombres.

1. Voyez la remarque de la page 87.

Examinons le concept — ou si on préfère, le prédicat — « identique à 0 ». 0 tombe sous ce concept. Par contre, sous le concept « identique à 0 mais non identique à 0 » aucun objet n'est subsumé; en sorte que 0 est le nombre cardinal qui lui appartient. Nous avons donc un concept « identique à 0 » et un objet 0 qui tombe sous ce concept dont on peut dire :

> le nombre cardinal qui appartient au concept « identique à 0 » est identique au nombre cardinal qui appartient au concept « identique à 0 »;
>
> le nombre cardinal qui appartient au concept « identique à 0 mais non identique à 0 » est 0.

D'après notre définition, le nombre qui appartient au concept « identique à 0 » suit immédiatement 0 dans la suite naturelle des nombres.

Si nous posons par définition :

> 1 est le nombre cardinal qui appartient au concept « identique à 0 »,

nous pouvons exprimer la dernière proposition comme suit :

> 1 suit immédiatement 0 dans la suite naturelle des nombres.

Peut-être n'est-il pas superflu de remarquer que la définition de 1 a une légitimité objective qui n'est subordonnée à aucune constatation [1]. On confond souvent une définition objective avec le fait que certaines conditions subjectives doivent être satisfaites pour que nous soyons en mesure de formuler une définition, et que l'occasion nous en est donnée par des perceptions sensibles [2].
[91] Ces conditions ne sauraient altérer le caractère *a priori* des propositions déduites. Il est requis, par exemple, que le cerveau, au moins pour ce que nous en savons, soit irrigué d'un sang normalement constitué et en quantité suffisante. Mais la vérité de notre dernière proposition n'en dépend pas. Elle demeure vraie quand ces conditions disparaissent; et même si tous les êtres rationnels devaient sombrer tous ensemble dans un sommeil hivernal, elle ne serait pas abolie pendant ce temps, mais demeurerait inaltérée. La vérité d'une proposition ne réside pas dans le fait qu'elle est pensée.

1. Proposition dépourvue de généralité.
2. Cf. B. Erdmann, *Die Axiome der Geometrie*, p. 164.

78. Voici encore quelques propositions qu'on peut démontrer au moyen de nos définitions. Le lecteur verra facilement comment on peut opérer.

1. Si a suit immédiatement 0 dans la suite naturelle des nombres, $a = 1$.

2. Si 1 est le nombre cardinal qui appartient à un concept, il y a un objet qui tombe sous ce concept.

3. Si 1 est le nombre cardinal qui appartient à un concept F alors, si l'objet x tombe sous le concept F et si y tombe sous le concept F, $x = y$; c'est-à-dire, x est le même objet que y.

4. Si un objet tombe sous un concept F et si de ce que x tombe sous le concept F et de ce que y tombe sous le concept F on peut conclure que $x = y$, alors le nombre cardinal qui appartient au concept F est 1.

5. La relation de m à n posée par la proposition :

« n suit immédiatement m dans la suite naturelle des nombres » est une relation biunivoque.

Nous n'avons pas encore dit que pour tout nombre cardinal, il en existe un autre qu'il suit immédiatement ou qui le suit immédiatement dans la suite des nombres.

[92] 6. Tout nombre, à l'exclusion de 0, suit immédiatement un autre nombre dans la série naturelle des nombres.

79. Si nous voulons maintenant démontrer que tout nombre cardinal n a un cardinal qui lui succède immédiatement dans la suite naturelle des nombres, nous devons indiquer un concept auquel appartient ce dernier cardinal.

Je choisis à cette fin le concept :

« apppartenant à la suite naturelle des nombres dont n est le dernier terme ».

Je dois d'abord m'en expliquer.

Je rappellerai en premier lieu, en des termes légèrement différents, la définition que j'ai donnée dans ma *Begriffschrift* [1] de la succession dans une suite.

La proposition :

« Si tout objet avec lequel x a la relation Φ tombe sous le

1. *Begriffschrift. Eine der Arithmetik nachgebildete Formelsprache des reinen Denken.* Halle, 1879. On traduit habituellement : *Idéographie* (*N.d.T.*).

concept F, et si, quand d tombe sous le concept F, il suit que, quel que soit d, tout objet avec lequel d a la relation Φ tombe sous le concept F, alors y tombe sous le concept F, quel que soit le concept F »
veut dire la même chose que

« y succède à x dans la Φ-suite »

et que

« x précède y dans la Φ-suite. »

80. Il ne sera pas superflu d'ajouter quelques remarques. Puisqu'on laisse la relation Φ indéterminée, il n'est pas nécessaire de penser la suite sous la forme d'un ordre spatial ou temporel, bien que ces cas ne soient pas exclus.

On trouverait peut-être plus naturelle cette autre définition : si, partant de x, l'attention passe sans discontinuer d'un objet à un autre, lequel est avec le premier dans la relation Φ, et si on aboutit de cette manière à y, on dit que y succède à x dans la Φ-suite.

[93] C'est une manière de rechercher la succession, mais ce n'en est pas une définition. Que le mouvement de notre attention atteigne ou non y, cela dépend de plusieurs circonstances subjectives accessoires, par exemple du temps dont nous disposons, ou du fait que nous connaissons la chose que nous cherchons. Mais que y suive ou non x dans la Φ-suite, ceci n'a rien à voir avec notre attention ni avec les conditions de sa persévérance; cela tient aux choses mêmes. Une feuille verte réfléchit certains rayons lumineux, qu'ils puissent ou non atteindre mes yeux et éveiller une sensation; un grain de sel est soluble, que je le jette réellement dans l'eau ou non, que je l'observe ou non; il demeure soluble, même si je n'ai pas la possibilité d'en faire l'expérience.

Ma définition nous fait passer du domaine des possibles subjectifs à celui de la détermination objective. Et il est bien vrai que, si une proposition déterminée découle d'une autre, c'est là un fait objectif, indépendant des lois du mouvement de notre attention; et c'est tout un que nous effectuions ou non l'inférence. Nous avons ici un critère effectif qui décide de la question chaque fois qu'elle se pose, même si dans un cas particulier nous pouvons être empêchés de l'appliquer par des difficultés extrinsèques, lesquelles sont, pour la chose elle-même, sans conséquences.

Il n'est pas toujours besoin de parcourir tous les termes intermédiaires, à partir du terme initial jusqu'à un certain objet choisi, pour être sûr que ce dernier succède au premier dans la suite. Supposons connu, par exemple, que *b* suit *a* et que *c* suit *b* dans la Φ-suite, nous pouvons en conclure d'après notre définition que *c* suit *a* sans connaître les termes intermédiaires.

Seule cette définition de la succession dans une suite permet de réduire aux lois logiques générales l'inférence de *n* à $(n + 1)$, qui pourrait sembler propre aux mathématiques.

[94] **81.** Si nous prenons comme relation Φ celle qui affecte *m* et *n* de telle sorte que :

« *n* suit immédiatement *m* dans la suite naturelle des nombres », nous dirons, à la place de Φ-suite, « suite naturelle des nombres ».

J'ajoute encore cette définition :

la proposition

« *y* succède à *x* dans la Φ-suite ou *y* est le même que *x* »

veut dire la même chose que

« *y* appartient à la Φ-suite qui commence avec *x* »

« *x* appartient à la Φ-suite qui se termine par *y* ».

Par conséquent, *a* appartient à la suite naturelle des nombres qui se termine par *n* si *n* ou bien suit *a* dans la suite naturelle des nombres, ou bien est identique à *a* [1].

82. Il faut maintenant montrer que — sous une condition qui reste à donner — le nombre qui appartient au concept :

« appartenant à la suite naturelle des nombres qui se termine par *n* »

suit immédiatement *n* dans la suite naturelle des nombres. On aura alors montré qu'il existe un nombre succédant immédiatement à *n* dans la suite naturelle des nombres, et qu'il n'y a pas de dernier terme dans cette suite. Il est évident que cette proposition ne peut tenir son fondement de l'expérience ni de l'induction.

1. Si *n* n'est pas un nombre, alors seul *n* appartient à la suite des nombres qui se termine par *n*. Qu'on veuille bien ne pas se laisser arrêter par l'expression.

La preuve elle-même nous conduirait trop loin. Seule la marche du raisonnement pourra être brièvement indiquée. On veut démontrer que :

1. Si *a* succède immédiatement à *d* dans la suite naturelle des nombres, et si on peut dire de *d* que :

[95] le nombre cardinal, qui appartient au concept « appartenant à la suite naturelle des nombres qui se termine par *d* »

suit immédiatement *d* dans la suite naturelle des nombres, alors on peut dire de *a* que

le nombre cardinal qui appartient au concept « appartenant à la suite naturelle des nombres qui se termine par *a* »

suit immédiatement *a* dans la suite naturelle des nombres.

Il faut deuxièmement montrer que 0 vérifie ce qui a été dit de *d* et de *a* dans les propositions ci-dessus, et en déduire que *n* le vérifie également, si *n* appartient à la suite naturelle des nombres qui commence avec 0. Ce raisonnement est une application de la définition que j'ai donnée de l'expression

« *y* succède à *x* dans la suite naturelle des nombres », quand on prend comme concept F ce que j'ai dit plus haut de *d* et de *a*, et qu'on l'applique à 0 et *n*.

83. Pour démontrer la proposition 1 du § précédent, nous devons montrer que *a* est le nombre cardinal qui appartient au concept « appartient à la suite naturelle des nombres qui se termine par *a*, mais différent de *a* ». Et pour cela, il faut encore montrer que ce concept a même extension que le concept » appartient à la suite naturelle des nombres qui se termine par *d* ». On a besoin alors de la proposition suivante : aucun objet appartenant à la suite naturelle des nombres commençant par 0 ne peut se succéder à lui-même dans la suite naturelle des nombres. Cette proposition doit être démontrée au moyen de notre définition de la succession dans une suite, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut [1].

1. E. Schröder semble penser (*op. cit.*, p. 63) que cette proposition est la conséquence d'une notation que l'on aurait pu choisir autrement. On remar-

[96] Ce faisant, il faudra ajouter à la proposition selon laquelle le nombre cardinal qui appartient au concept

« appartient à la suite naturelle des nombres qui se termine par n »

suit immédiatement n dans la suite naturelle des nombres, la condition que n appartienne à la suite naturelle des nombres qui commence par 0. On peut employer une expression plus brève, que je définis comme suit :

la proposition

« n appartient à la suite naturelle des nombres commençant par 0 »

veut dire la même chose que

« n est un nombre fini ».

On peut alors formuler la dernière proposition comme suit : aucun nombre fini ne se succède à lui-même dans la suite naturelle des nombres.

Les cardinaux infinis.

84. Aux nombres finis, on peut opposer les cardinaux infinis. Le nombre cardinal qui appartient au concept « nombre cardinal fini » est un cardinal infini. Désignons-le par ∞_1. S'il était un nombre fini, il ne pourrait pas succéder à lui-même dans la suite naturelle des nombres. Or, on peut montrer que ∞_1 a, lui, cette propriété.

Le nombre cardinal infini ∞_1, défini comme nous l'avons fait, ne recèle rien de mystérieux ou d'étonnant. « Le nombre cardinal qui appartient au concept F est ∞_1 », cela ne veut rien dire d'autre que : il existe une relation qui met en correspondance biunivoque les objets qui tombent sous le concept F et les nombres finis. Cette expression a un sens clair et sans équi-

[97] voque si on tient compte de nos définitions; cela suffit pour que

quera ici encore cet inconvénient qui porte préjudice à tout l'exposé de Schröder, que l'on ne sait jamais si le nombre est un signe — on demandera alors quelle est sa dénotation — ou s'il est cette dénotation même. Supposez qu'on introduise des signes différents en sorte que le même signe ne réapparaisse jamais, il ne s'ensuit pas que ces signes auront des dénotations différentes.

l'usage du signe ∞_1 soit légitime, et nous sommes sûrs qu'il veut dire quelque chose. Et peu importe que nous ne puissions pas nous donner une quelconque représentation du nombre infini; cette impuissance, d'ailleurs, nous l'éprouvons déjà à l'égard des cardinaux finis. De la sorte, notre nombre ∞_1 est aussi déterminé qu'un nombre cardinal fini quelconque : on peut l'identifier et le distinguer d'un autre sans aucune incertitude.

85. G. Cantor a récemment introduit les nombres infinis dans un ouvrage remarquable [1]. J'approuve entièrement sa manière de stigmatiser l'idée selon laquelle on devrait accorder l'existence effective aux seuls nombres finis. Ces derniers ne sont ni sensibles ni spatiaux, pas plus que les fractionnaires, les négatifs, les irrationnels et les complexes. Si on appelle effectif ce qui agit sur les sens ou ce qui, au moins, a des effets qui produiront à plus ou moins longue échéance des perceptions sensibles, aucun de ces nombres n'est effectif. Mais il n'est pas besoin de telles perceptions pour démontrer nos théorèmes. On peut utiliser sans crainte un nom ou un signe nouveau dans le cours de la recherche quand son introduction n'est exposée à aucune objection logique; et notre nombre ∞_1 a droit de cité, aussi bien que deux ou trois.

Si, à ce qu'il me semble, je suis d'accord avec Cantor sur ce point, je m'en sépare quelque peu dans le choix des termes. Le nombre cardinal, tel que je l'entends, Cantor l'appelle « puissance », tandis que le concept cantorien [2] de nombre se rapporte à l'ordre. Il

[98] est vrai que les nombres finis sont indépendants de l'arrangement en une suite et qu'il n'en va pas de même pour les infinis. Mais ni l'usage commun du mot « nombre », ni la question « combien ? » n'enveloppent l'idée d'un ordre déterminé. Le nombre de Cantor répond plutôt à la question : « le combientième est le terme final d'une succession? » Pour cette raison, ma terminologie semble mieux s'accorder avec l'usage. Si on élargit le sens d'un mot, il faut prendre garde que le plus grand nombre possible de pro-

1. *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883.

2. Cette expression peut sembler en contradiction avec l'objectivité du concept sur laquelle nous avons précédemment mis l'accent, mais ici seul le choix des termes est subjectif.

positions générales demeurent valides, et surtout une proposition aussi fondamentale que l'indépendance du nombre cardinal par rapport à la succession. Pour notre part, nous n'avons eu besoin d'aucune extension de sens parce que notre concept de nombre cardinal s'applique d'emblée aux nombres infinis.

86. Cantor obtient son nombre infini au moyen du concept de relation : suivre dans une succession; ce concept diffère de ce que j'entends par « suivre dans une suite ». Selon Cantor, il y a succession par exemple quand on ordonne les nombres entiers finis, positifs de telle sorte que les nombres impairs soient pris dans leur suite naturelle, ainsi que les pairs; et qu'en outre les nombres pairs suivent les impairs. Dans cette succession, 0 suivrait 13, mais il n'y aurait aucun nombre précédant immédiatement 0. Or ce cas ne peut pas se produire dans la suite de telle que je l'ai définie. On peut démontrer rigoureusement, sans recourir à aucun axiome de l'intuition, que, si y suit x dans la Φ-suite, il existe un objet qui précède y immédiatement dans cette suite. Il me semble que la définition précise de la succession et du nombre cantorien sont encore à trouver. Et Cantor doit faire appel à « l'intuition interne », quelque peu mystérieuse, là où il faudrait chercher une preuve à partir des définitions, ce qui n'est pas impossible. Car je crois bien entrevoir comment
[99] on pourrait déterminer les concepts en question. Ces remarques en tout cas ne veulent en rien porter atteinte à la légitimité et fécondité des notions cantoriennes. Bien au contraire, je me félicite que ces recherches donnent de l'extension à notre science, particulièrement en ce qu'elles fraient un accès purement arithmétique aux nombres (puissances) infinis d'ordre supérieur.

5. Conclusion

87. J'espère avoir dans cet écrit rendu vraisemblable l'idée que les lois de l'arithmétique sont des jugements analytiques, et par conséquent *a priori*. L'arithmétique serait donc simplement une logique développée, et chaque proposition arithmétique une loi logique, bien que dérivée. L'application de l'arithmétique à la connaissance de la nature serait alors l'élaboration logique des faits d'observation [1]; et calculer serait déduire. Les lois des nombres n'auraient pas besoin, à l'encontre de ce que pense Baumann [2], d'être confirmées par la pratique pour qu'on les dise applicables au monde extérieur. Dans le monde extérieur, dans la totalité de l'espace, il n'y a ni concepts, ni propriétés de concepts, ni nombres. Les lois des nombres ne sont donc pas proprement applicables aux choses externes : ce ne sont pas des lois de la nature. Mais elles s'appliquent aux jugements qui parlent des choses du monde extérieur : elles sont les lois des lois de la nature. Elles n'affirment pas un lien entre des phénomènes naturels, mais entre des jugements parmi lesquels figurent les lois de la nature.

88. Kant [3] a visiblement sous-estimé la valeur des jugements analytiques — c'est la conséquence de la manière trop étroite dont il en détermine le concept — bien qu'il semble avoir eu quelque idée [4] de la conception plus large des jugements analy-
[100] tiques qui fut ici la nôtre. Si on part de sa définition, la division en jugements analytiques et synthétiques n'est pas exhaustive. Kant pense aux jugements universels affirmatifs. Dans ce cas, on peut bien parler d'un concept sujet et demander si le concept

1. L'observation implique elle-même une activité logique.
2. *Op. cit.*, tome II, p. 670.
3. *Op. cit.*, tome III, p. 39, sqq.
4. *P. 43*, Kant écrit qu'un jugement synthétique peut être soumis au principe de non-contradiction dans le seul cas où il a pour hypothèse un autre jugement synthétique.